DET KGL. DANSKE VIDENSKABERNES SELSKAB
MATEMATISK-FYSISKE MEDDELELSER, BIND XXV, NR. 10

EINLEITUNG IN DIE ALLGEMEINE KONGRUENZLEHRE

VON

JOHANNES HJELMSLEV

SECHSTE MITTEILUNG

KØBENHAVN
I KOMMISSION HOS EJNAR MUNKSGAARD
1949

Printed in Denmark.
Bianco Lunos Bogtrykkeri.

§ 1. Einleitung.

1. Diese sechste Mitteilung soll die allgemeine Kongruenzlehre der offenen Ebene, ohne Eindeutigkeitsaxiom und ohne Anordnungsaxiome, weiterführen.[1]

In der fünften Mitteilung wurde gezeigt, dass die Hauptsätze der euklidischen Geometrie unabhängig vom Eindeutigkeitsaxiom bestehen. In der vorliegenden Arbeit soll das entsprechende Resultat für die nicht-euklidischen Geometrien mittels einer axiomatischen Transformation erzielt werden.

Wir erinnern an das Axiomsystem wie wir es ursprünglich (Einl. I und III) aufgestellt haben (das allgemeine Axiomsystem der offenen Ebene):

I. Es gibt Punkte. Es gibt Punktmengen, welche gerade Linien (Geraden) heissen. Es gibt Transformationen, welche Bewegungen heissen. Jede Bewegung ist eine Zuordnung, bei welcher jeder Geraden und jedem auf ihr gelegenen Punkte eine Gerade und ein auf ihr gelegener Punkt umkehrbar eindeutig entspricht. Die Umkehrung einer Bewegung ist auch eine Bewegung. Die Bewegungen bilden eine Gruppe. Zwei Figuren, die durch eine Bewegung auseinander abgeleitet werden können, sollen kongruent heissen.

II. Ausser der Identität gibt es eine und nur eine Bewegung, welche alle Punkte einer geraden Linie fest lässt. Diese Bewegung heisst Spiegelung an der geraden Linie. Die Linie wird als Achse der Spiegelung bezeichnet. Jede Gerade ist die Achse einer Spiegelung. Jeder Punkt ausserhalb der Achse geht bei der Spiegelung in einen von ihm verschiedenen Punkt über.

[1] Die früher veröffentlichten Mitteilungen:
Erste Mitt. Math.-fys. Medd. VIII, 11, 1929; Zweite Mitt. ibd. X, 1, 1929; Dritte Mitt. ibd. XIX, 12, 1942; Vierte Mitt. ibd. XXII, 6, 1945; Fünfte Mitt. ibd. XXII, 13, 1945 sollen als Einl. I—V zitiert werden.

III. Eine Gerade b heisst senkrecht zu einer von ihr verschiedenen Geraden a (in Zeichen: $b \perp a$), wenn b bei der Spiegelung an a (Spiegelung a) in sich selbst übergeht. Durch jeden Punkt geht eine und nur eine Gerade b, die senkrecht zu einer gegebenen Geraden a ist; die beiden Geraden a, b haben stets einen und nur einen Punkt gemein.

IV. Wenn zwei Punkte A, B auf einer Geraden l liegen, so haben sie immer eine Spiegelungsachse m derart, dass A und B bei der Spiegelung m mit einander vertauscht werden, während l in sich selbst übergeführt wird ($l \perp m$). Diese Spiegelungsachse schneidet l in einem Punkt M, welcher als Mittelpunkt von A und B (oder von AB) auf l bezeichnet wird.

V. Zwei kongruente Punktreihen $ABC \cdots$ und $AB'C' \cdots$ auf einer oder auf zwei Geraden, mit dem gemeinsamen Punkt A, können immer durch eine Spiegelung ineinander übergeführt werden.

VI. Es gibt zwei zueinander senkrechte kongruente Geraden.

Was VI anbetrifft, verweisen wir auf die Bemerkungen in Einl. III, S. 4—7.

§ 2. Bemerkungen zum obenstehenden Axiomsystem.

2. A. Bei den meisten Anwendungen wird man durchweg voraussetzen, dass je zwei Geraden kongruent sind, d. h. dass jede Gerade in eine beliebige andere Gerade durch eine Bewegung übergehen kann, und dann spielt natürlich das Axiom VI keine Rolle.

Es dürfte aber in dieser Hinsicht Interesse haben, das folgende Beispiel einer endlichen Geometrie, wo alle Axiome I—VI gültig sind, die letztere Bedingung, dass je zwei Geraden kongruent sind, aber nicht erfüllt ist, in Erinnerung zu bringen[1]:

Unsere Geometrie umfasst 9 Punkte: $A, B, C, D, E, F, G, H, I$, welche der Anschaulichkeit halber in dem beistehenden quadratischen Schema (Fig. 1) aufgestellt sind.

Es gibt 12 Geraden, jede Gerade mit 3 Punkten:

I. 3 »waagerechte« Geraden ABC, DEF, GHI;

II. 3 »lotrechte« Geraden ADG, BEH, CFI;

[1] Dieses Beispiel einer endlichen Geometrie ist wie ich glaube zum ersten mal von T. Brodén (2. skand. Matematikerkongres 1911, S. 133) angegeben worden.

III. 3 »rechts abwärts gehende« Geraden *DHC*, *AEI*, *BFG*;

IV. 3 »links abwärts gehende« Geraden *BDI*, *CEG*, *FHA*,

Jede Gerade der Gruppe I ist senkrecht zu jeder Geraden der Gruppe II; ebenso jede Gerade der Gruppe III zu jeder Geraden der Gruppe IV. Es ergibt sich dann von selbst, was man unter Spiegelung zu verstehen hat, und es ist leicht zu sehen, dass alle Axiome I--VI erfüllt sind. Es gibt aber keine Bewegung, welche eine »waagerechte« Linie in eine »schräge Linie« überführt.

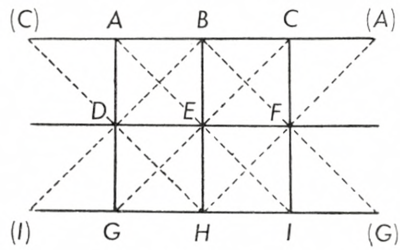

Fig. 1.

B. Unser Axiomsystem enthält keine Aussagen über die Bestimmung einer Geraden durch zwei Punkte. Wir haben früher (Einl. I, III) gelegentlich die Möglichkeit in Betracht gezogen, dass zwei Punkte ausnahmsweise keine Verbindungsgerade haben. Im folgenden soll aber diese Möglichkeit ausgeschlossen werden. Mit anderen Worten: Wir wollen stets voraussetzen, dass zwei Punkte wenigstens eine Verbindungsgerade haben.

Wir erinnern an die früher eingeführten Bezeichnungen:

Nachbarpunkte *A*, *B* sind zwei Punkte mit mehreren Verbindungsgeraden. Das System der beiden Punkte soll als singulärer Abstand *AB* bezeichnet werden.

Fernpunkte *A*, *B* sind Punkte mit einer einzigen Verbindungsgeraden. Das System der beiden Fernpunkte soll als ordinärer Abstand bezeichnet werden.

Schmieggeraden *a*, *b* sind zwei Geraden mit mehreren gemeinsamen Punkten. Das Geradensystem *a*, *b* bezeichnen wir als singulären Winkel (*a*, *b*).

Kreuzgeraden *a*, *b* sind Geraden mit einem einzigen gemeinsamen Punkt. Sie bilden einen ordinären Winkel (*a*, *b*).

Ferner wird auch gelegentlich von Nachbarpunkten einer Geraden (d. h. Nachbarpunkten eines Punktes dieser Geraden) gesprochen. Ebenso von Fernpunkten einer Geraden.

Ferngeraden heissen zwei Geraden, wenn alle Punkte der einen Geraden Fernpunkte der anderen Geraden sind, Nachbargeraden, wenn jeder Punkt der einen Geraden Nachbarpunkt der anderen Geraden ist.

Ein Winkel (a, b) soll fast-recht heissen, wenn das Lot von a in einem gemeinsamen Punkt der beiden Geraden Schmieggerade von b ist.

Um geläufige Ausdrücke der Elementargeometrie verwenden zu können, sprechen wir von einem Dreieck ABC mit den Seitengeraden a, b, c, wo a durch B und C, b durch C und A, c durch A und B gehen, und mit den Winkeln (b, c), (c, a), (a, b) im oben angegebenen Sinne.

Ist das Dreieck rechtwinklig $(a \perp b)$, so bezeichnen wir die Abstände AC und BC als Katheten, den Abstand AB als Hypotenuse.

C. Bei Anwendungen, wo es naturgemäss erscheint, die traditionellen Ordnungsregeln für die Punkte einer geraden Linie anzunehmen, lassen sich viele unserer Untersuchungen sehr anschaulich gestalten, wenn diese Ordnungsregeln zum allgemeinen Axiomsystem I—VI hinzugefügt werden. In der so definierten Geometrie, welche wir dann als graphische Geometrie (im weitesten Sinne) bezeichnen werden, soll dann die folgende Aussage gelten:

Je zwei Punkte A, B bestimmen eindeutig eine Strecke AB. Diese Strecke soll (wie der Abstand AB) ordinär heissen, wenn die Verbindungsgerade AB eindeutig bestimmt ist. In anderen Fällen nennen wir die Strecke singulär; die Strecke ist dann in allen Verbindungsgeraden von A und B enthalten.

In dieser Geometrie ist z. B. unmittelbar ersichtlich, dass eine Gerade l, welche durch den Schnittpunkt von zwei zueinander senkrechten Geraden (oder von zwei beliebigen Kreuzgeraden) a, b geht und Schmieggerade von einer von diesen ist, die andere eindeutig schneiden muss.

Ebenso leicht zeigt sich die folgende Tatsache. Wenn drei Geraden durch denselben Punkt gehen und eine von diesen Schmieggerade der beiden anderen ist, so sind diese letzteren Schmieggeraden voneinander.

Wenn aber die Ordnungsregeln nicht zur Verfügung stehen, lassen sich die erörterten Tatsachen in der hier vorgelegten Form nicht beweisen.

D. Die wichtigsten der früher bewiesenen einleitenden allgemeinen Sätze (Einl. I, 10—29) sollen hier zusammengestellt werden:

1°. Die Aufeinanderfolge abc von drei Spiegelungen, deren Achsen a, b, c durch denselben Punkt O gehen, kann durch eine einzige Spiegelung ersetzt werden. Die Achse dieser Spiegelung geht durch O.

2°. Zwei zueinander senkrechte Geraden a, b durch den Punkt O bestimmen eine involutorische Bewegung ab, welche jede Gerade c durch O in sich überführt. Diese Bewegung soll als Punktspiegelung O bezeichnet werden. Sie lässt keinen von O verschiedenen Punkt fest.

3°. Die Aufeinanderfolge von 3 Spiegelungen, deren Achsen a, b, c senkrecht zu einer Geraden l sind, lässt sich durch eine einzige Spiegelung ersetzen, deren Achse ebenfalls senkrecht auf l steht.

4°. Die Aufeinanderfolge ABC von drei Punktspiegelungen an Punkten A, B, C einer Geraden l kann durch eine einzige Punktspiegelung an einem Punkt derselben Geraden ersetzt werden.

5°. Wenn A und B auf l liegen, und $r \perp l$, so ist ArB eine Spiegelung, deren Achse senkrecht auf l steht.

6°. Wenn ArB eine involutorische Bewegung darstellt, so muss das Lot von A auf r durch den Punkt B gehen.

7°. Zwei Punkte haben immer einen eindeutig bestimmten Mittelpunkt, unabhängig davon, ob die Punkte eine oder mehrere Verbindungsgeraden haben (Einl. I, 28—29).

8°. Wenn 3 Geraden a, b, c, eine involutorische Spiegelungsfolge abc bestimmen, und wenn zwei von ihnen, a, b, einen eindeutigen Schnittpunkt O haben, dann geht die dritte Gerade c notwendig durch O (Einl. III, S. 6).

9° a. Die Lote x, y welche von einem beliebigen Punkt P auf zwei Schmieggeraden gefällt werden, sind ebenfalls Schmieggeraden (Einl. I, 62).

b. Haben zwei Geraden p, q zwei gemeinsame Lote r, s (also unendlich viele), so müssen die Lote x, y, welche von einem beliebigen Punkt P auf p und q gefällt werden, (entweder ganz zusammenfallen oder) unendlich viele Punkte gemein haben. (ibid.)

10°. Ferner erinnern wir an die folgenden Hilfssätze, die früher bewiesen oder leicht beweisbar sind:

a. Ist in einem rechtwinkligen Dreieck ABC mit dem rechten Winkel C einer der beiden Winkel A, B singulär, so ist der andere fast-recht; und umgekehrt. Folgt aus Einl. I, S. 18, oder IV, S. 11, und dem obenstehenden Satz 9° a.

b. Ist eine Kathete singulär, die andre ordinär, so sind ihre Gegenwinkel singulär bez. fast-recht.

c. Sind beide Katheten ordinär, so ist keiner der Gegenwinkel singulär oder fast-recht.

d. Ist die Hypotenuse singulär, so sind beide Katheten singulär.

e. Sind in einem beliebigen Dreieck zwei Seiten ordinär, die dritte Seite aber singulär, so ist der Winkel der beiden ordinären Seiten singulär.

E. Ferner erinnern wir an die folgenden Resultate in Einl. V, S. 5—7:

Zwei Nachbarpunkte A, B bestimmen ein lineares Element (einen Strich) $S(A, B)$, d. i. die Menge der Punkte, welche in allen Geraden durch das Punktepaar A, B enthalten sind. Die Menge dieser Geraden bilden ein Schmiegbüschel $s(A, B)$.

Aus dem linearen Element $S(A, B)$ wird das ebene Element (der Fleck) $F(A, B)$ durch Drehung um einen beliebigen Punkt von $S(A, B)$ abgeleitet. $F(A, B)$ ist der Inbegriff der gemeinsamen Fixpunkte aller direkten Bewegungen mit den Fixpunkten A, B.

Jede Gerade, welche durch A oder einen anderen Punkt von $F(A, B)$ gelegt wird, schneidet $F(A, B)$ in einem Strich, welcher dem Strich $S(A, B)$ kongruent ist.

Für die innere Geometrie des Flecks $F(A, B)$ sind alle Axiome der offenen Ebene gültig, wenn wir unter »Gerade« den Durchschnitt des Flecks mit einer ursprünglichen Geraden verstehen.

F. Im allgemeinen Fall wo keine Ordnungsregeln zur Verfügung stehen, muss mit der Möglichkeit gerechnet werden, dass verschiedene Arten von Elementen im Sinne der folgenden Definition auftreten können:

Zwei Elemente sollen gleichartig oder ungleichartig heissen, je nachdem sie kongruente Elemente enthalten (speciell selbst kongruent sind) oder nicht.

Zwei singuläre Punktepaare (Abstände) sollen gleichartig heissen, wenn sie zwei kongruenten Elementen angehören. Ebenso: Zwei singuläre Winkel sind gleichartig, wenn ihre Scheitelelemente gleichartig sind.

Die Anzahl der verschiedenen Arten von singulären Abständen, bezw. Winkeln, soll immer als endlich vorausgesetzt werden.

Wenn alle Abstände gleichartig sind, was z. B. in der graphischen Ebene immer der Fall ist, soll die Ebene homogen heissen.

3. Es lässt sich ohne Schwierigkeit beweisen, dass die am Schluss des Abschnitts C für die graphische Ebene angeführten

Sätze auch für jede andere homogene Ebene Gültigkeit haben. Für nicht-homogene Ebenen verlieren sie aber ihre allgemeine Gültigkeit.

Sind je zwei Punkte unserer Ebene Nachbarpunkte, so ist die Ebene homogen. Sind nämlich A und B beliebige Punkte auf zwei zueinander senkrechten Geraden a, b mit dem Schnittpunkt C, und sind p, q zwei Geraden durch das Punktepaar A, B, so lassen sich zwei Geraden a_1, b_1 durch A, B derart bestimmen, dass

$$pq = aa_1 = bb_1,$$

woraus folgt, dass sowohl a_1 wie b_1 durch C gehen.

Da aber die Geradenpaare p, q; a, a_1; b, b_1 kongruent sind, folgt hieraus, dass die Elemente $S(A, B)$, $S(A, C)$, $S(B, C)$ gleichartig sind, d. h. die Ebene ist homogen.

4. Im folgenden soll stets vorausgesetzt werden, dass ordinäre Punktepaare vorhanden sind. Das bedeutet tatsächlich keine wesentliche Beschränkung der Untersuchung.

Sollte nämlich der Fall eintreten, dass je zwei Punkte der Ebene Nachbarpunkte sind, so folgt erstens hieraus, dass die Ebene homogen ist (3), und zweitens lässt sich dann jede Figur, welche durch eine endliche Anzahl von Punkten definiert ist, in einen zweckmässig bestimmten Fleck einbetten, und für diesen Fleck gilt dann die obenstehende Voraussetzung, dass ordinäre Punktepaare vorhanden sind.

§ 3. Allgemeine Eigenschaften der Schmieggeraden.

5. Zwei Schmieggeraden a, b durch den Punkt A (Fig. 2) haben die Lote n, n_1 in A und werden von der Transversalen $c \perp b$ in zwei verschiedenen Punkten P und Q geschnitten. Es sei ferner C ein von A verschiedener gemeinsamer Punkt der Geraden n, n_1, und die Verbindungsgerade CP werde mit c_1 bezeichnet.

Es sei nun c' diejenige Gerade durch P, welche durch die Gleichung $ac_1 = c'c$ definiert wird; c' ist dann von c verschieden, weil a und c_1 voneinander verschieden sind; die Gerade a geht nämlich nicht durch C, weil a und n nur einen Punkt gemein haben. Es folgt nun:

$$c_1nn_1 = c_1ab = cc'b.$$

Die Bewegung $cc'b$ ist sonach involutorisch, d. h. die Gerade c' geht durch den eindeutig bestimmten Schnittpunkt Q der Geraden b, c. Die beiden verschiedenen Geraden c, c' gehen also

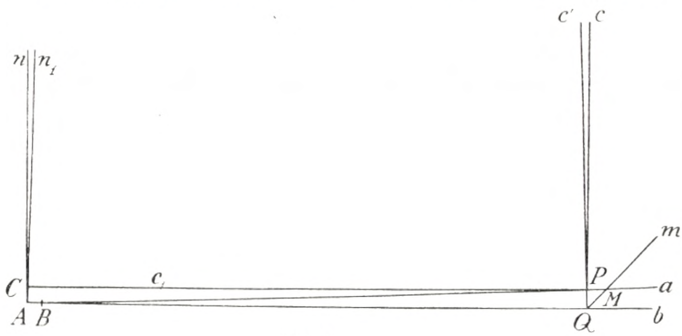

Fig. 2

durch die beiden Punkte P, Q, d. h. diese Punkte P, Q sind Nachbarpunkte.

Aus der Gleichung $ac_1 = c'c$ folgt ferner, dass a und c_1 Schmieggeraden sind.

Aus D, 10°, S. 7 folgt überdies, dass der Winkel (a, c) fast-recht ist. Ist ausserdem der Abstand AQ ordinär, so sind die beiden Geraden a, c Kreuzgeraden; wären sie nämlich Schmieggeraden, so müssten A und Q nach der obigen Betrachtung Nachbarpunkte sein.

6. Es seien nun a, b senkrecht zu einer Geraden p in zwei Nachbarpunkten A, B (Fig. 3). Jede Transversale c, welche senkrecht auf b steht, schneidet dann die beiden Geraden a, b in zwei Nachbarpunkten P, Q.

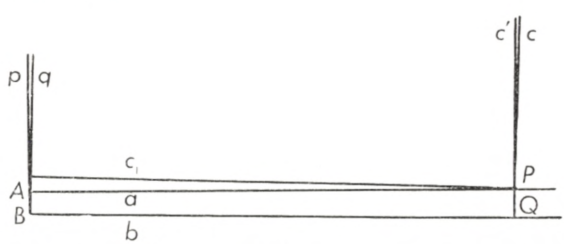

Fig. 3.

Um das zu beweisen, ziehen wir durch A und B eine neue Gerade q und fällen die senkrechte c_1 von P auf q. Durch P ziehen wir ferner die Gerade c' derart, dass $ac_1 = c'c$. Da nun BAc_1 eine involutorische Transformation ist, und da ferner $BA = ba$, so ist auch $bac_1 = bc'c$ involutorisch, und das bedeutet, dass c' durch den eindeutigen Schnittpunkt Q von b und c geht, dass also die beiden Punkte P und Q zwei verschiedene Verbindungsgeraden c und c' haben, und hiermit ist der Satz bewiesen.

Ähnliche Betrachtungen zeigen umgekehrt, dass ein singulärer Abstand PQ zwischen einem Punkte P und einer Geraden b durch Projektion auf eine beliebige auf b senkrechte Gerade p in einen singulären Abstand übergeht.

Es folgt hieraus, dass zwei Gegenseiten eines dreirechtwinkligen Vierecks entweder beide singulär oder beide ordinär sind.

Ferner ergibt sich, dass zwei Punkte, deren Projektionen auf eine Gerade Fernpunkte sind, selbst Fernpunkte sein müssen.

Ist der Abstand BQ ordinär, so ist die Gerade AQ Schmieggerade von a in A und von b in Q. Durch jeden gemeinsamen Punkt der beiden Geraden AQ und a geht dann eine gemeinsame Normale von a und b (Einl. I, 32). Also:

Haben zwei Nachbargeraden a, b eine gemeinsame Normale, so haben sie unendlich viele gemeinsame Normalen.

§ 4. Die drei Typen der offenen Ebene.

7. Aus Einl. I, 32—36, ziehen wir die folgenden Sätze heran:

Rechtecke existieren in jeder offenen Ebene, wo das Eindeutigkeitsaxiom nicht gilt.

Jedes Rechteck hat zwei Spiegelungsachsen.

Gibt es ein Rechteck $ABCD$, dessen Dimensionen (d. h. die Abstände AB und AD) ordinär sind, so gibt es ein Rechteck mit der Ecke A und mit zwei anderen Ecken X, Y in beliebig gewählten Punkten der beiden Geraden AB und AD.

In diesem Falle soll die Ebene (und ihre Geometrie) singulär heissen.

Auf ähnliche Weise zeigt sich, dass, wenn ein Rechteck $ABCD$ existiert, dessen eine Dimension AB ordinär und die andere Dimension AD singulär ist, dann gibt es ein Rechteck mit der Ecke A und mit zwei anderen Ecken X, Y, von welchen X ein beliebig gewählter Punkt der Geraden AB und Y ein beliebig gewählter Punkt des linearen Elementes $S(A, D)$ ist.

Wenn Rechtecke dieser Art existieren, aber keine Rechtecke, deren Dimensionen beide ordinär sind, soll unsere Ebene (und ihre Geometrie) schwach-singulär heissen.

Wenn hingegen die beiden Dimensionen eines jeden Rechtecks singulär sind, soll die Ebene und die zugehörige Geometrie regulär heissen.

Die Geometrie eines ebenen Elementes ist im allgemeinen schwach-singulär, in besonderen Fällen singulär.

8. Zwei Geraden sollen parallel heissen, wenn sie dasselbe Normalensystem haben.

In der singulären Ebene gibt es parallele Ferngeraden (Fernparallelen) und natürlich auch parallele Nachbargeraden (Nachbarparallelen).

In der schwach-singulären Ebene gibt es Nachbarparallelen aber keine Fernparallelen.

In der regulären Ebene gibt es überhaupt keine Parallelen.

Es liegen nun zwei parallele Nachbargeraden a, a_1 vor (Fig. 4) und es seien b und d zwei ihrer gemeinsamen Normalen, welche a und a_1 in bezw. B, B_1 und A, A_1 schneiden. Von einem beliebig gewählten Punkt D auf d fällen wir das Lot $c = DC$ auf b. Hierdurch entsteht ein 3-rechtwinkliges Viereck $ABCD$ mit rechten Winkeln bei A, B, C. Es lässt sich dann zeigen, dass der vierte Winkel D recht oder fast-recht sein muss.

Die Bewegung aa_1c ist nämlich involutorisch, weil die drei Geraden a, a_1, c senkrecht auf b stehen, und da die Bewegungen aa_1 und AA_1 gleichwertig sind, folgt hieraus, dass auch die Bewegung AA_1c involutorisch ist. Das bedeutet aber, dass eine Gerade d_1 durch A und A_1 senkrecht zu c gelegt werden kann, und hieraus folgt sofort, dass der Winkel (c, d) fast-recht (oder recht) ist, w. z. b. w.

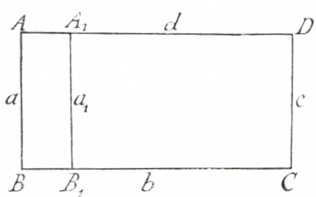

Fig. 4.

Es folgt hieraus zugleich, dass die von einem beliebigen Punkt D der Ebene auf a und b gefällten Lote fast-senkrecht (oder senkrecht) zueinander sind.

Umgekehrt: Hat ein Viereck $ABCD$ ordinäre Seiten AB und BC, rechte Winkel bei A, B, C und einen fast-rechten Winkel bei D, so gibt es eine Nachbarparallele zu a (Fig. 5).

Beweis: Die Normale d_1 von A auf c ist Schmieggerade von d, weil der Winkel (c, d) fast-recht ist. Es sei nun A_1 ein neuer gemeinsamer Punkt von d und d_1, und es sei a_1 die Normale von d in A_1, dann sind die Bewegungen AA_1 und aa_1 gleichwertig und infolgedessen

$$AA_1c = aa_1c,$$

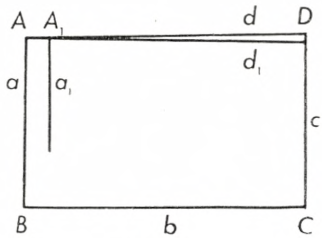

Fig. 5.

also aa_1c involutorisch. Hieraus folgt aber sofort, dass $a_1 \perp b$, d. h. a und a_1 sind parallel.

Es folgt nun ferner, dass die von einem beliebigen Punkt der Ebene auf a und b gefällten Lote fast-senkrecht (oder senkrecht) zueinander sind.

§ 5. Der Mittelliniensatz.

9. Die Mittelpunkte $A', B', C', \cdots$ der Paare entsprechender Punkte in zwei kongruenten geradlinigen Punktreihen $ABC \cdots$ und $A_1B_1C_1 \cdots$ liegen immer auf einer Geraden; speciell können sie in einen einzigen Punkt zusammenfallen.

Beweis: Durch die Punktspiegelung A' wird $ABC \cdots$ in eine Punktreihe $A_1B_2C_2 \cdots$ übergeführt (Fig. 6). Sind die beiden Punkt-

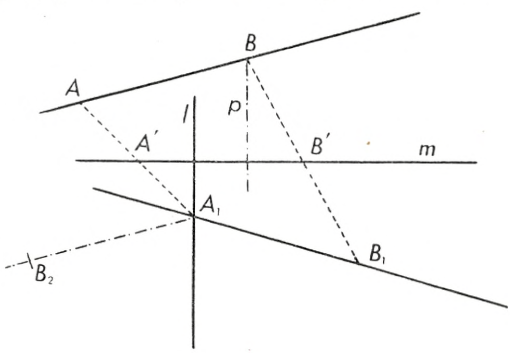

Fig. 6.

reihen $A_1B_2C_2 \cdots$ und $A_1B_1C_1 \cdots$ identisch, so haben wir den genannten Ausnahmefall, wo die Mittelpunkte $A', B', C', \cdots$ in A' zusammenfallen. Anderenfalls betrachten wir die Spiegelungsachse l

der beiden Reihen $A_1B_2C_2 \cdots$ und $A_1B_1C_1 \cdots$ und fällen die senkrechte m von A' auf l. Die Bewegung $A'l$ führt dann die Punktreihe $ABC \cdots$ in $A_1B_1C_1 \cdots$ über. Diese Bewegung ist aber einer anderen pP gleichwertig, wobei p die Normale von B auf m und P einen auf m gelegenen Punkt bezeichnen. Da aber diese Bewegung den Punkt B nach B_1 bringen soll, folgt hieraus, dass P mit dem Mittelpunkt B' von B und B_1 zusammenfällt. Also liegt B' auf m, und die anderen Mittelpunkte ebenfalls.

§ 6. Halbdrehungen.

10. Durch einen Punkt O seien zwei Geraden a, a_1 gelegt, welche nicht senkrecht oder fast-senkrecht zueinander sind. Als Halbdrehung (a, a_1) um O wird dann wie früher diejenige Transformation bezeichnet, bei welcher jedem Punkt P der Mittelpunkt P_1 des Abstands PP' entspricht, wo P' denjenigen Punkt bezeichnet, in welchen P durch die Drehung aa_1 übergeht.

Jede Gerade l mit einer Punktreihe $ABC \cdots$ geht bei der Drehung aa_1 in eine Gerade l' mit der Punktreihe $A'B'C' \cdots$ über, und bei der Halbdrehung (a, a_1) wird also die Punktreihe $ABC \cdots$ in eine Punktreihe $A_1B_1C_1 \cdots$ auf der Mittelgeraden l_1 der beiden kongruenten Reihen $ABC \cdots$ und $A'B'C' \cdots$ übergeführt. Demgemäss definieren wir l_1 als die der Geraden l bei der Halbdrehung (a, a_1) entsprechende Gerade.

Jeder Geraden p durch O entspricht eine Gerade p_1 durch O derart, dass $pp_1 = aa_1$, und jedem Punkt P auf p entspricht seine Projektion P_1 auf p_1.

Die umgekehrte Transformation soll als inverse Halbdrehung $(\overline{a_1, a})$ bezeichnet werden. Bezüglich dieser Transformation muss aber bis auf weiteres beachtet werden, dass sie nicht immer für alle Punkte der Ebene ausführbar ist.

Aus Einl. I, 55 geht hervor, dass zwei Halbdrehungen um denselben Punkt O vertauschbar sind. Dies gilt unabhängig davon, ob die Halbdrehungen direkt oder invers sind, wenn nur in jedem in Betracht kommenden Falle die Punkte, auf welche die Transformationen angewandt werden sollen, wirklich transformierbar sind.

Jede Transformation, welche durch Zusammensetzung einer Folge von direkten oder inversen Halbdrehungen um denselben

Punkt O entsteht, soll als Polarkollineation um O bezeichnet werden. Liegt bei einer solchen Polarkollineation eine gerade Linie durch O fest, so liegen alle gerade Linien durch O fest. Die Transformation wird dann als Polarhomologie um O bezeichnet.

§ 7. Idealpunkte und Idealgeraden.

11. Zwei vorgegebene Ferngeraden a, b bestimmen ein Idealbüschel, d. h. die Gesamtheit aller Geraden c welche mit a und b in Involution sind.

Durch jeden vorgegebenen Punkt C geht eine und nur eine Gerade c des Büschels, welche folgendermassen bestimmt wird (Einl. I, 46):

Von C fällen wir Lote r, s auf a, b mit den Fusspunkten A, B, ferner das Lot t auf die Verbindungsgerade von A und B, und die gesuchte Gerade c wird dann durch die Gleichung $c = rts$ bestimmt.

Wie früher führen wir dann die Redeweise ein, dass das Idealbüschel einen Idealpunkt bestimmt, welcher auf jeder Geraden c des Büschels liegt, und durch welchen jede dieser Geraden geht.

12. Wir gehen nun daran, die so definierten Idealpunkte der offenen Ebene näher zu betrachten.

Zu diesem Zwecke führen wir ein für allemal einen festen Punkt O als Fundamentalpunkt ein, und wir betrachten zunächst nur solche Idealbüschel (Idealpunkte) (a, b), wo a durch O geht, und die von O auf b gefällte Senkrechte a' nicht senkrecht oder fast-senkrecht zu a ist (Fig. 7). In diesem Falle soll das Geradenpaar (das Idealbüschel, der Idealpunkt) regulär heissen; der Abstand OB von O bis zum Schnittpunkt B der beiden Geraden a', b ist der Voraussetzung zufolge ordinär.

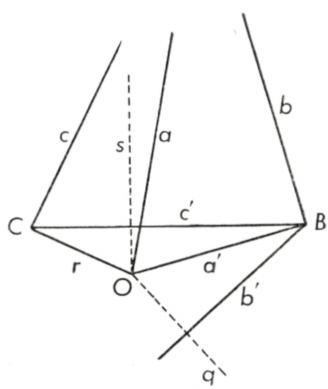

Fig. 7.

Die Halbdrehung (a, a') bringt b nach b' ($a'q = aa'$, $b' \perp q$).

Es sei nun c eine beliebige Gerade des Büschels (a, b) und r die von O auf c gefällte Senkrechte mit dem Fusspunkt C. Es sei ferner die Gerade s durch O derart bestimmt, dass $rs = aa'$. Es muss dann die von C auf s gefällte Normale c' durch B gehen, und die Halbdrehung (a, a') führt c in c' über.

Es sei nun d eine neue Gerade des Büschels. Sie wird durch die Halbdrehung (a, a') in ähnlicher Weise in eine Gerade d' durch B transformiert.

Bilden wir die gewöhnliche Fundamentalfigur der Geraden c', d', a', indem wir die Lote von O auf c' und d' fällen, und führen sodann die ganze Figur durch die inverse Halbdrehung $(\overline{a', a})$ wieder in c, d, a mit den Loten von O über, so ergibt sich sofort, dass die Geraden c, d, a in Involution sind. Also ist

$$bca = acb, \quad bda = adb, \quad cda = adc,$$

und hieraus folgt

$$(bca)(adb) = (acb)(bda),$$

also

$$bcd = dcb,$$

d. h. die Geraden b, c, d sind in Involution.

Nehmen wir eine neue Gerade e des Büschels (a, b), so ergibt sich ebenso, dass die beiden Folgen ceb und deb involutorisch sind, und da sich schon die Folge dcb als involutorisch erwiesen hat, so folgt hieraus, dass auch die Folge cde involutorisch ist.

Damit ist gezeigt, dass je drei Geraden des Büschels in Involution sind.

Das ganze Idealbüschel wird durch die Halbdrehung (a, a') in ein Realbüschel mit dem Scheitel B transformiert. Es ist aber nicht zu erwarten, dass jede Gerade dieses Realbüschels durch die inverse Halbdrehung $(\overline{a', a})$ transformierbar ist.

13. Es sei nun ein Idealbüschel (p, q) vorgelegt, wo keine der beiden Geraden p, q durch O geht. Ziehen wir dann durch O die Gerade a, welche dem Büschel angehört, und ist wenigstens eins der beiden Paare a, p und a, q regulär, so lässt sich der vorliegende Fall auf den vorhergehenden zurückführen. Sind aber beide Paare a, p und a, q irregulär, so soll das Büschel (p, q) und somit der Idealpunkt (p, q) irregulär heissen.

Die irregulären Idealpunkte bilden eine besondere Klasse, welche durch alle Halbdrehungen (und Polarkollineationen) um O in sich selbst transformiert wird, d. h. jeder irregulärer Idealpunkt geht durch Halbdrehungen um O in einen irregulären Idealpunkt über.

Die Normalen einer Geraden p bilden ein Idealbüschel. Der zugehörige Idealpunkt P wird als Pol der Geraden p bezeichnet.

Ist die Ebene singulär oder fast-singulär, so ist der Pol P einer Geraden p immer irregulär.

Ist die Ebene regulär, so ist der Pol P einer Geraden p dann und nur dann irregulär, wenn p durch den Fundamentalpunkt O geht oder benachbart zu O ist.

14. Eine Idealgerade wird wie in der elementaren Ebene definiert (Einl. II, 18) als eine Sammlung von eigentlichen und uneigentlichen Punkten, welche durch eine Halbdrehung um den Fundamentalpunkt O in die eigentlichen und uneigentlichen Punkte einer eigentlichen Geraden übergeführt werden können.

Die Pole aller Geraden durch O bilden nach Definition eine besondere Idealgerade, die Fundamentalgerade, die Polare von O.

Der Satz in Einl. II, 19, dass die Pole aller Geraden durch einen beliebigen festen Punkt P auf einer Idealgeraden liegen, gilt hier nur für den Fall, wo P Fernpunkt zu O ist, und wird dann wie früher bewiesen.

§ 8. Ein Hauptsatz über das vollständige Viereck.

15. Es sei ein vollständiges Viereck $ABCD$ (Fig. 8) vorgelegt derart, dass je zwei Ecken Fernpunkte, und je zwei Seiten, welche eine Ecke gemein haben, Kreuzgeraden sind. Es seien ferner von ein und demselben Punkt P die Normalen auf alle sechs Seiten gefällt:

a und a_1 auf AD und BC, b und b_1 auf BD und AC, c und c_1 auf CD und AB.

Wenn dann $bc = c_1 b_1$ gilt, so folgt $ca = a_1 c_1$ und $ab = b_1 a_1$; mit anderen Worten: Die beiden Büschel abc und $a_1 b_1 c_1$ sind symmetrisch.

Zum Beweise bestimmen wir 6 andere Normalen a', b', c', a'_1, b'_1, c'_1, der Seiten des Vierecks derart, dass

$$Da = a'A, \quad Ac_1 = c'_1 B, \quad Bb = b'D, \quad Ca_1 = a'_1 B,$$
$$Ab_1 = b'_1 C, \quad Dc = c'C.$$

Es folgt hieraus

$$\begin{aligned} &(1) \quad a'c_1'b' = (DaA)(Ac_1B)(BbD) = D(ac_1b)D, \\ &(2) \quad b'a_1'c' = D(ba_1c)D, \\ &(3) \quad c'b_1'a' = D(cb_1a)D. \end{aligned}$$

Da ferner $bc = c_1b_1$, folgt

$$(Bb'D)(Dc'C) = (Bc_1'A)(Ab_1'C),$$

oder

$$b'c' = c_1'b_1',$$

woraus man schliesst, dass c_1' und b_1' durch den Schnittpunkt P' von b' und c' gehen. Dieser Schnittpunkt P' ist eindeutig be-

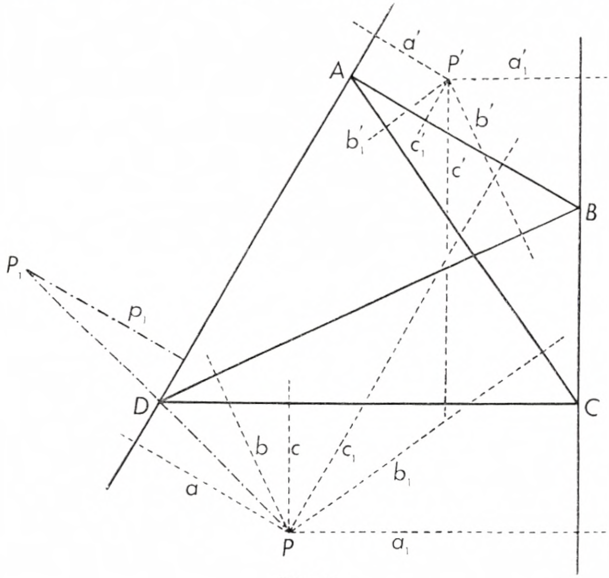

Fig. 8.

stimmt, weil die beiden Normalen BD und CD von b' und c' Kreuzgeraden sind. Derselbe Punkt wird dann auch eindeutig durch die beiden Geraden b' und c_1' bestimmt, weil diese auf den Kreuzgeraden DB und AB senkrecht stehen.

Auf dieselbe Weise ergibt sich, dass P' durch die Geraden c', b_1' eindeutig bestimmt wird.

Da nun die auf den rechten Seiten der obenstehenden Gleichungen (1), (2), (3) stehenden Ausdrücke Achsenspiegelungen darstellen, deren Achsen alle durch denjenigen Punkt P_1 gehen, welcher aus P durch Spiegelung an D entsteht, so folgt, dass die auf den linken Seiten dieser Gleichungen stehenden Spiegelungsfolgen derselben Bedingung genügen. Den obigen Bemerkungen zufolge müssen aber die Achsen der von diesen letzteren Spiegelungsfolgen dargestellten Spiegelungen auch durch P' gehen. Da aber die Punkte P_1 und P' nur eine Verbindungsgerade haben, weil sie auf zwei Fernnormalen p_1 und a' der Geraden DA liegen, so folgt schliesslich, dass die drei in Rede stehenden Achsenspiegelungen identisch sind, also

$$ac_1b = ba_1c = cb_1a,$$

woraus folgt

$$ac_1 = ca_1, \quad ba_1 = ab_1,$$

oder

$$ca = a_1c_1, \quad ab = b_1a_1, \text{ w. z. b. w.}$$

Der Satz gilt auch für reguläre Idealpunkte A, B, C, D, wenn die entsprechenden Bedingungen erfüllt sind, da man dann durch Halbdrehungen um O erzielen kann, dass alle 4 Punkte in Realpunkte übergehen.

§ 9. Die Geometrie der erweiterten Ebene.

16. Fassen wir nun die Gesamtheit der Realpunkte und der regulären Idealpunkte sowie der Real- und Idealgeraden ins Auge, so entsteht eine erweiterte Ebene Ω, deren Geometrie wir im folgenden näher erforschen wollen.

Von den irregulären Idealpunkten kommen dabei nur die Pole der Geraden durch den Fundamentalpunkt O (die zu O konjugierten Punkte), deren Gesamtheit die Fundamentalgerade ω ausmacht, in Betracht. Jede Realgerade hat mit ω einen und nur einen Punkt (Schnittpunkt) gemein. Und dasselbe gilt von jeder regulären Idealgeraden, was daraus hervorgeht, dass diese immer durch Halbdrehungen um O in eine Realgerade transformiert werden kann.

17. Für die Ebene Ω sollen nun die folgenden Redeweisen eingeführt werden:

Zwei Geraden l, m, sollen in Ω p a r a l l e l heissen, wenn sie die Fundamentalgerade ω im selben Punkt schneiden. Diese Eigenschaft ist bei jeder Halbdrehung um O invariant.

Zu jeder Geraden l kann durch O eine und nur eine Parallele l' gezogen werden. Die zu verschiedenen Geraden $l, m, n, \cdots$ gezogenen Parallelen durch O sollen mit $l', m', n', \cdots$ bezeichnet werden.

Unter dem Winkel (l, m) zweier Geraden l, m in Ω verstehen wir den Winkel (l', m') in der ursprünglichen Ebene.

Zwei Winkel (l, m) und (p, q) sollen in Ω kongruent heissen, wenn die beiden Winkel (l', m') und (p', q') in der ursprünglichen Ebene kongruent sind, d. h. die beiden Systeme (l', m') und (p', q') können durch zwei Spiegelungen deren Achsen durch O gehen, zur Deckung gebracht werden.

l soll dann in Ω senkrecht zu m heissen, wenn $l' \perp m'$ im ursprünglichen Sinne.

Die zu $l, m, n, \cdots$ senkrechten Geraden durch O seien mit $\widehat{l}, \widehat{m}, \widehat{n}, \cdots$ bezeichnet. Der Winkel (l, m) in Ω ist dann mit den beiden Winkeln (l', m') und $(\widehat{l}, \widehat{m})$ in der ursprünglichen Ebene gleichbedeutend.

18. Der Hauptsatz über das vollständige Viereck (15) lässt sich nun als Hauptsatz der Geometrie in Ω in folgender Form aussprechen:

Wenn 4 Punkte A, B, C, D in Ω der Bedingung genügen, dass zwei von ihnen aus den beiden anderen durch kongruente Winkel projiziert werden, dann werden je zwei der vier Punkte aus den beiden anderen durch kongruente Winkel projiziert.

Für die Lage der Punkte und ihrer Verbindungsgeraden gelten dabei dieselben Bedingungen wie früher.

19. Die Fundamentalfigur (Einl. I, S. 24, Fig. 3) lässt sich in folgender Form in die Geometrie der erweiterten Ebene übertragen:

a, b, c seien drei Geraden durch denselben Punkt U derart, dass je zwei von ihnen nur diesen Punkt gemein haben. C sei ein beliebiger Punkt auf c, welcher nicht in U fällt oder Nachbarpunkt von U ist. Es seien ferner $CA = r$ und $CB = s$ die Lote von C auf a und b (in der Ebene Ω). Die Gerade AB sei mit l und das Lot von C auf l mit t bezeichnet. Es wird dann

$$(r, t) \equiv (c, s),$$

d. h. die Winkel (r, t) und (c, s) sind in Ω einander kongruent. Es gelten nämlich in der Ebene Ω die folgenden Kongruenzen:

$$(r, a) \equiv (s, b) \text{ (rechte Winkel in } \Omega\text{)},$$

also (dem Viereckssatz zufolge)

$$(a, l) \equiv (c, s).$$

Ferner:

$$(a, l) \equiv (a, r) + (r, l) \equiv (l, t) + (r, l) \equiv (r, t),$$

also

$$(r, t) \equiv (c, s), \text{ w. z. b. w.}$$

20. Durch diese Fundamentalfigur lassen sich analog wie früher Halbdrehungen in Ω, und infolgedessen ähnliche Figuren, d. h. kollineare Figuren, wo entsprechende Winkel stets kongruent sind, definieren.

In Ω lässt sich stets eine Ähnlichkeit so bestimmen, dass zwei vorgegebene Fernpunkte A, B in zwei andere gegebene Fernpunkte A_1, B_1, übergehen. Zu dem Zwecke wählt man zuerst eine Halbdrehung, welche A in A_1 überführt. Hierdurch gehe nun B in B_2 über. Fällt B_2 nicht in B_1, so kann man B_2 immer mittels einer Folge von höchstens 3 Halbdrehungen um A_1 in B_1 überführen. Dass die so hergestellte Ähnlichkeit eindeutig ist, lässt sich folgendermassen einsehen: Man wähle zuerst einen Punkt S derart, dass das Dreieck SAB ordinär ist (d. h. die Seiten und Winkel sind alle ordinär). Der dem Punkt S bei der gesuchten Ähnlichkeit entsprechende Punkt S_1 wird dann als Schnittpunkt der beiden den Geraden SA und SB entsprechenden Geraden bestimmt. Sodann findet man leicht eine eindeutige Konstruktion des einem anderen beliebigen Punkte T entsprechenden Punktes T_1, da wenigstens zwei der Geraden TA, TB, TS einen eindeutigen Schnittpunkt haben.

In dem Spezialfalle, wo AB und A_1B_1 parallel sind, sind je zwei entsprechende Geraden parallel.

21. In der Ebene Ω können wir nun eine erweiterte Art von Symmetrie Σ_a bezüglich einer Geraden a (Spiegelung an a in Ω) einführen, nämlich als eine Kollineation, bei der alle Punkte von a sich selbst entsprechen, während entsprechende Linien l, l_1 stets symmetrische Winkel mit a bilden, d. h. $(l, a) \equiv (a, l_1)$.

Dass eine solche Kollineation existiert, ergibt sich sofort in dem Spezialfalle, wo a durch den Fundamentalpunkt O geht. Die gesuchte Kollineation ist nämlich dann mit der ursprünglich definierten Spiegelung a identisch.

In anderen Fällen, wo die Gerade a nicht durch O geht, braucht man nur eine Spiegelung b der ursprünglichen Ebene, deren Achse b durch O geht, durch eine Halbdrehung in Ω, welche die Gerade b in a überführt, zu transformieren. Die hierdurch entstehende Transformation genügt nämlich der obenstehenden Definition von Σ_a, und ihre Eindeutigkeit folgt aus dieser Definition selbst.

Einander bei Σ_a entsprechende Punkte liegen auf einer Geraden, die in dem für die Ebene Ω eingeführten Sinne auf a senkrecht steht.

22. Schliesslich definieren wir Kongruenztransformationen in Ω als Kollineationen die durch Zusammensetzung von Spiegelungen in Ω entstehen. Dass man hierdurch zu ganz ähnlichen Sätzen wie in der ursprünglichen Ebene gelangt, ist einleuchtend.

Eine Parallelverschiebung soll in Ω als eine Folge von zwei Spiegelungen Σ_a und Σ_b, deren Achsen a, b parallel sind, definiert werden. Bei dieser Transformation geht jede Gerade in eine zu ihr parallele Gerade über, und die auf a und b senkrechte Gerade durch einen beliebigen Punkt P geht durch den entsprechenden Punkt P_1.

Zwei Parallelverschiebungen $P \to A_1$, $P_1 \to P_2$, setzen sich zur Parallelverschiebung $P \to P_2$ zusammen. Dies folgt daraus, dass die Gerade PP_2 in sich selbst verschoben wird.

Sind A, B, C drei Punkte einer geraden Linie, so lässt sich die Parallelverschiebung $A \to C$ aus den beiden Verschiebungen $A \to B$, $B \to C$, zusammensetzen. Hiernach wird die Summe der Abstände (Strecken) AB und BC durch den Abstand (Strecke) AC definiert.

23. Aus den vorhergehenden Entwicklungen geht hervor, dass die erweiterte Ebene Ω eine Ebene vom singulären (euklidischen) Typus darstellt. Wir können deshalb unsere Untersuchung mit einem kurzen Hinweis auf die am Schluss der fünften Mitteilung angegebenen Hilfsmittel abschliessen.

In der Ebene Ω führen wir ein rechtwinkliges Koordinatensystem x_1, x_2 mit dem Anfangspunkt im Fundamentalpunkt O ein. Die Koordinaten (Skalare) werden durch die Punkte der ersten Koordinatenachse x_1 derart repräsentiert, dass O dem Skalar Null (0) und ein anderer, in ordinärem Abstand von O gelegener Punkt e der Achse x_1 dem Skalar 1 (der Einheit), entspricht, und dass ferner zwei Punkte der Achse x_1, die Spiegelbilder bezüglich O sind, stets entgegengesetzten Skalaren (a und $-a$) entsprechen.

Addition der Skalare a und b wird so definiert, dass die Gleichung

$$a + b = c$$

bedeutet, dass die Parallelverschiebung $O \rightarrow c$ durch Zusammensetzung der beiden Parallelverschiebungen $O \rightarrow a$ und $O \rightarrow b$ entsteht. Aus den obigen Betrachtungen folgt dann, dass die gewöhnlichen Gesetze der Addition gültig sind.

Im Falle der homogenen Ebene ist die Summe von zwei singulären Skalaren immer singulär. In der allgemeinen Ebene aber nicht.

Im Falle der graphischen Ebene legen wir die Grössenfolge der Skalare durch die Reihenfolge der Punkte auf der x_1-Achse fest.

Das Produkt zweier Skalare soll durch dieselbe Konstruktion wie in Einl. V, S. 29 ff. definiert werden, und die Beweise der gewöhnlichen Gesetze lassen sich dann wie dort durchführen.

Es ergibt sich so, dass das ganze System von Skalaren einen Ring bildet, in welchem jeder singuläre Skalar einen Nullteiler darstellt.

Die Skalarbezeichnungen der Punkte auf der x_1-Achse werden auf die Punkte der x_2-Achse in solcher Weise übertragen, dass jeder Punkt der x_2-Achse durch denselben Skalar bezeichnet wird wie sein auf der x_1-Achse gelegenes Spiegelbild bezüglich einer bestimmten, im voraus gewählten der beiden Spiegelungsachsen von x_1 und x_2.

Jedem Punkt P der Ebene wird sodann ein Skalarpaar (x_1, x_2) zugeordnet, wo x_1 und x_2 diejenigen Skalare sind, welchen die Projektionen von P auf die beiden Koordinatenachsen x_1, x_2 nach obiger Verabredung entsprechen.

Das Skalarpaar (Koördinatenpaar) (x_1, x_2) wird auch als Vektor $x = OP$ bezeichnet, und der Vektor $(-x_2, x_1)$ soll der Quervektor $\widehat{x}$ von x heissen. Dieser entsteht aus x durch eine Drehung um O, welche den Einheitspunkt $(1, 0)$ auf der x_1-Achse in den Einheitspunkt $(0,1)$ auf der x_2-Achse überführt.

24. Im Koordinatensystem x_1, x_2 wird nunmehr jede Gerade g durch eine lineare Gleichung

$$\alpha x_1 + \beta x_2 + \gamma = 0$$

in den laufenden Koordinaten x_1, x_2 dargestellt, wobei α, β, γ (die homogenen Koordinaten von g) Skalare bedeuten, von welchen die zwei ersten nicht beide singulär (Null oder Nullteiler) sind.

Da die Senkrechte von O auf g,

$$-\beta x_1 + \alpha x_2 = 0,$$

Kreuzgerade zu g ist, folgt hieraus, dass die Quadratsumme $\alpha^2 + \beta^2$ ordinär ist.

Da ferner der pythagoreische Lehrsatz nun leicht beweisbar ist (vgl. Einl. V, 43), folgt hieraus erstens, dass die Gleichung $x^2 = -1$ keine Lösung hat, und zweitens, dass der Koordinatenring die fundamentale Eigenschaft besitzt, dass $\sqrt{1+\omega^2}$ für jeden Skalar ω des Ringes existiert, oder in naheliegender Ausdrucksweise:

Der Koordinatenring ist ein pythagoreischer Ring.

25. Wir haben bisher nur Realpunkte und reguläre Idealpunkte in Betracht gezogen. Was die irregulären Punkte anbetrifft, hat man zwei Arten zu unterscheiden: erstens die relativ irregulären Punkte, welche durch veränderte Wahl des Fundamentalpunktes in reguläre Punkte verwandelt werden können, und zweitens die absolut irregulären Punkte, welche bei jeder Wahl des Fundamentalpunktes irregulär bleiben. Die letzteren können nur in den singulären oder schwach-singulären Geometrien auftreten.

26. Es sei nun in einer regulären Ebene eine Schnittpunktsfigur vorgelegt, welche aus einer endlichen Anzahl von Punkten, darunter aber einige relativ irreguläre Punkte $U, V, \cdots$, und Geraden besteht. Durch Halbdrehungen um den vorgegebenen Fundamentalpunkt O kann immer erzielt werden, dass alle Punkte und Geraden der Figur mit Ausnahme von $U, V, \cdots$ in Realpunkte und Realgeraden übergehen, und durch Halbdrehungen um geeignete neue Fundamentalpunkte können danach auch die irregulären Punkte $U, V, \cdots$ allmählich nacheinander alle in Realpunkte verwandelt werden. Mittels dieses Verfahrens können wir dann in jedem Falle die Schnittpunktsfiguren der regulären Ebene in Figuren überführen, in welchen die in Rede stehenden Punkte sämtlich Realpunkte sind. Es folgt aber hieraus, dass jeder Schnittpunktssatz der gewöhnlichen projektiven Geometrie auch in der hier beschriebenen regulären Geometrie Gültigkeit hat, wenn nur alle der betreffenden Schnittpunktsfigur angehörigen Schnittpunkte und Verbindungsgeraden eindeutig bestimmt sind.

27. Es ergibt sich auch, dass eine Kollineation durch zwei einander entsprechende vollständige Vierecke $ABCD$ und $A_1B_1C_1D_1$ eindeutig festgelegt ist, wenn nur jedes dieser Vierecke ordinär ist, d. h., wenn je zwei Ecken des Vierecks Fernpunkte und je zwei von derselben Ecke ausgehende Seiten Kreuzgeraden sind.

Ferner erhält man, dass zwei projektive Punktreihen durch zwei einander entsprechende Punkttripel ABC und $A_1B_1C_1$ eindeutig bestimmt sind, wenn je zwei Punkte eines jeden dieser Tripel Fernpunkte sind.

28. Auch lässt sich das durch die Realpunkte und ihre absoluten Polaren (sowie die Realgeraden und ihre absoluten Pole) definierte Polarsystem eindeutig auf die ganze Ebene erweitern, und diese absolute Polarität lässt sich durch eine Gleichung der Form

$$xx' = k$$

darstellen, wo x und x' ein beliebiges Paar konjugierter Punkte (x_1, x_2) und (x'_1, x'_2) und k einen konstanten, nicht-singulären Skalar bedeuten.

Die Gruppe der Bewegungen in der ursprünglichen Ebene ist dann die Kollineationsgruppe, welche die durch die obenstehende Gleichung bestimmte absolute Polarität invariant lässt.

29. Im Falle der schwach-singulären oder singulären Geometrie lassen sich die irregulären Punkte nicht durch Halbdrehungen in Realpunkte überführen, und wir müssen dann bei den projektiven Schnittpunktsfiguren diesen Punkten in anderer Weise Rechnung tragen. Ein Hilfsmittel hierzu haben wir in der analytisch beweisbaren Tatsache, dass ein allgemeines Kennzeichen dafür, dass drei Geraden durch denselben Punkt gehen, die lineare Abhängigkeit ihrer Koordinatentripel $(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)$, $(\alpha_2, \beta_2, \gamma_2)$, $(\alpha_3, \beta_3, \gamma_3)$ ist.

Hiernach bleiben also auch in diesem Falle die Schnittpunktsätze der projektiven Geometrie aufrechterhalten, doch mit dem Vorbehalt, dass alle in Rede stehenden Schnittpunkte und Verbindungsgeraden eindeutig bestimmt sind.

Schlusswort.

Die im vorstehenden entwickelten Hilfsmittel zur Begründung der Kongruenzlehre der offenen Ebene können, wie fast unmittelbar ersichtlich, auch zur Begründung einer analogen Kongruenzlehre der geschlossenen Ebene Verwendung finden. Zu diesem Zwecke sind nur die folgenden naheliegenden Umgestaltungen unseres Axiomsystems notwendig:

1) Im Axiom II muss der letzte Satz ausgelassen werden, d. h. für eine Achsenspiegelung müssen Fixpunkte ausserhalb der Spiegelungsachse zugelassen werden;

2) im Axiom III ist die Aussage über das Senkrechtstehen folgendermassen abzuändern: durch jeden vorgegebenen Punkt P geht eine Gerade a, die auf einer vorgegebenen Geraden b senkrecht steht, die Eindeutigkeit von a wird aber nur verlangt, wenn P auf b liegt;

3) Axiom IV wird durch das folgende ersetzt: Zu zwei Punkten A, B einer Geraden g gibt es immer zwei Mittelpunkte auf g. Durch jeden von diesen geht eine auf g senkrechte Spiegelungsachse von A, B.

Es lässt sich dann beweisen, dass jede Gerade p einen Pol P besitzt, durch welchen alle auf p senkrechten Geraden gehen, und umgekehrt, zu jedem Punkt P gehört eine Polare p, welche alle Geraden durch P senkrecht schneidet. Je zwei Geraden haben wenigstens einen Punkt gemein, und die ganze Lehre von den Idealpunkten braucht uns also hier nicht zu beschäftigen.

Schliesslich lässt sich in analoger Weise wie für die offene

Ebene eine analytische Geometrie vom euklidischen Typus mit Koordinaten, welche einem pythagoreischen Ring angehören, definieren, womit die Begründung erledigt wird.

Was spezielle Anwendungen der in dieser sechsten Mitteilung vorgetragenen Methoden anbetrifft, sei vor allem darauf hingewiesen, dass der elementare Fall, wo das Eindeutigkeitsaxiom als unbedingt gültig angenommen wird, sich nunmehr der älteren Darstellung gegenüber, besonders einfach gestaltet.

Die angegebene axiomatische Transformation der verschiedenen Geometrietypen in eine Geometrie vom euklidischen Typus wird zweifellos bei allen Anwendungen zur Vereinfachung der Probleme beitragen. Auch in der Raumgeometrie erweist sich die analoge Transformation als sehr wertvoll. Und für die Geometrie der Wirklichkeit soll schliesslich eine endgültige Begründung angebahnt werden.

Die hier angekündigten, bemerkenswerten Fragen der Kongruenzlehre sollen in einer späteren Arbeit fertig behandelt werden.

In einer demnächst erscheinenden anderen Arbeit soll ferner gezeigt werden, wie die entsprechenden Erweiterungen der projektiven Geometrie sich vollziehen lassen, und wie diese Erweiterungen dazu beitragen können, über die allgemeinen Grundlagen der Geometrie neues Licht zu verbreiten.

Indleveret til selskabet den 21. januar 1949.
Færdig fra trykkeriet den 19. maj 1949.